Exercice 1 : .... 5 points

1. On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par

$f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $g : x \longmapsto f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$. On pose $J = I_1 + I_2$ avec

$I_1 = \int_0^1 f(x)dx$ et $I_2 = \int_0^1 g(x)dx$.

a. Calculons I_1 et J.

$$I_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2\ ;$$

$$\boldsymbol{I_1 = \frac{1}{2}\ln 2.}$$

$$J = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx = \int_0^1 xdx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ ; \qquad \boldsymbol{J = \frac{1}{2}.}$$

b. Deduisons I_2.

$$J = \frac{1}{2}\ ;\quad I_1 = \frac{1}{2}\ln 2\ ;\quad J = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{I_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{1-\ln 2}{2}}$$

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $h\!: t \longmapsto h(t) = \dfrac{t^2-1}{2t-1}$.

a. Détermine trois réels a, b, c tels que pour tout $t \neq \frac{1}{2}$, $h(t) = at + b + \dfrac{c}{2t-1}$.

Méthode 1 : Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} t^2 - 1 & 2t-1 \\ \cline{2-2} -t^2 + \frac{1}{2}t & \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \\ \cline{1-1} \frac{1}{2}t - 1 & \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} & \\ \cline{1-1} -\frac{3}{4} & \end{array}$$

Ainsi, on a : $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{b = \frac{1}{4}}$; $\boldsymbol{c = -\frac{3}{4}}$ et $\boldsymbol{h(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \dfrac{\frac{3}{4}}{2t-1}}$

Méthode 2 : Les coefficients indéterminés

$$h(t) = at + b + \frac{c}{2t-1} = \frac{(at+b)(2t-1)+c}{2t-1} = \frac{2at^2 + (2b-a)t - b + c}{2t-1}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - a = 0 \\ -b + c = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ ; } b = \frac{1}{4} \text{ ; } c = -\frac{3}{4} \text{ ; } \qquad h(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \frac{\frac{3}{4}}{2t-1}.$$

b. Calculons $\int_0^1 \frac{x^2-1}{2x-1}dx$

La fonction $x \longmapsto \frac{x^2-1}{2x-1}$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$, car elle n'est pas continue sur $[0,1]$. On ne peut donc calculer $\int_0^1 \frac{x^2-1}{2x-1}dx$.

Exercice 2 : .... 5 points

On considère le nombre complexe $z = \frac{a+ib}{2-5i}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminons a et b pour que z ait pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{3\pi}{4}$.

Méthode 1

$$z = \frac{a+ib}{2-5i} = \frac{(a+ib)(2+5i)}{29} = \frac{2a-5b+i(5a+2b)}{29} = \frac{2a-5b}{29} + i\frac{(5a+2b)}{29}$$

$$Arg(z) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a-5b}{29} = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = -1 \\ \frac{(5a+2b)}{29} = \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-5b = -29 \\ 5a+2b = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$$

$\boldsymbol{a = 3}$ **;** $\boldsymbol{b = 7}$ **;** $\qquad z = \boldsymbol{\frac{3+7i}{2-5i}}$

Méthode 2: Utilisation de la tangente de l'angle

$$Arg(z) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5a+2b}{2a-5b}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{5a+2b}{2a-5b} \Rightarrow \frac{7a-3b}{2a-5b} = 0 \Rightarrow 7a - 3b = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{7}b$$

On sait que $a^2 + b^2 = 58 \Rightarrow \frac{9}{49}b^2 + b^2 = 58$

$$\Rightarrow \frac{58}{49}b^2 = 58 \Rightarrow b = 7 \text{ ou } b = -7$$

Pour $b = 7$ alors $a = 3$ donc $z = \boldsymbol{\frac{3+7i}{2-5i}}$

Pour $b = -7$ alors $a = -3$ donc $z = \boldsymbol{\frac{-3-7i}{2-5i}}$ **;** à exclure car le cosinus est négatif et le sinus est positif.

2. Écris cette somme $S = \left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{2020} + \left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{2024}$ sous forme algébrique.

Méthode 1

$S=\left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{2020}+\left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{2024}=z^{2020}+z^{2024}=\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2020}+\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2024}$

$=\sqrt{2}^{2020}e^{1515\pi i}+\sqrt{2}^{2024}e^{1518\pi i}=-\sqrt{2}^{2020}+\sqrt{2}^{2024}\ \left(\text{car } e^{i2k\pi}=1, e^{i(2k+1)\pi}=-1, k\in\mathbb{Z}\right)$

$=-2^{1010}+2^{1012}=2^{1010}(-1+4)=3\times 2^{1010}$

$\boldsymbol{S=3\times 2^{1010}}$**.**

Méthode 2 : Utilisation de la forme trigonométrique

$S=\left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{2020}+\left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{2024}$

$=\sqrt{2}^{2020}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{2020}+\sqrt{2}^{2024}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{2024}$

$=2^{1010}\left(\cos\left(\frac{2020\times 3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2020\times 3\pi}{4}\right)\right)+2^{1012}$

$=2^{1010}(\cos(1515\pi)+i\sin(1515\pi))+2^{1012}(\cos(1518\pi)+i\sin(1518\pi))$

$S=-2^{\mathbf{1010}}+2^{\mathbf{1012}}=2^{\mathbf{1010}}(\mathbf{-1+4})=3\times 2^{\mathbf{1010}}$

3. a. Calculons $[(2-5i)(-1+i)]^4$

$[(2-5i)(-1+i)]^4=(-2+2i+5i+5)^4$

$(3+7i)^4=3^4+4(3^3)(7i)+6(3^2)(7i)^2+4(3)(7i)^3+(7i)^4$

$=81+756i-2646-4116i+2401=-164-3360i$

$\boldsymbol{[(2-5i)(-1+i)]^4=-164-3360i}$

b. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^4+164+3360i=0$.

$z^4+164+3360i=0 \Leftrightarrow z^4=-164-3360i \Leftrightarrow z^4=[(2-5i)(-1+i)]^4$

$z=(2-5i)(-1+i)=3+7i$ est une solution de (E).

On obtient l'ensemble des solutions en multipliant $3+7i$ par les racines quatrièmes de l'unité qui sont : $-1, 1, i$ et $-i$. On a donc :

$z_1=(3+7i)(1)=3+7i$

$z_2=(3+7i)(-1)=-3-7i$

$z_3=(3+7i)(i)=-7+3i$

$z_4=(3+7i)(-i)=7-3i$

$\boldsymbol{S=\{3+7i\ ;\ -3-7i\ ;\ -7+3i\ ;\ 7-3i\}}$

Problème : .... 10 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm). On donne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x\mapsto f(x)=(x+1)e^{-x}-x$ et (C) sa courbe représenative dans le repère.

A. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g: x\mapsto g(x)=x+e^x$.

1. Etudions les variations de g.

$g(x)=x+e^x$

$\boldsymbol{g'(x)=1+e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}}$**, alors g est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**.**

Tableau de variation :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$-\infty \nearrow +\infty$

2. Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et justifions que $-0,57<\alpha<-0,56$.

D'après la réponse à la question précédente, g est une fonction continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Puis que $0\in\mathbb{R}$, il existe donc $\alpha\in\mathbb{R}$, $g(\alpha)=0$.

$$\begin{cases} g(-0,57)=-0,57+e^{-0,57}=-0,004<0 \\ g(-0,56)=-0,56+e^{-0,56}=0,01>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{g(-0,57)<0} \\ \boldsymbol{g(-0,56)>0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{-0,57<\alpha<-0,56.}$$

3. Déduisons le signe de $g(x)$.

- $\forall x\in]-\infty,\alpha[,\ g(x)<0$
- $\forall x\in]\alpha,+\infty[,\ g(x)>0$
- Pour $x=\alpha$, $g(x)=0$

B. 1. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+\infty=\text{"}FI\text{"}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}-x=\lim_{x\to-\infty} x\left(-1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}-x=-\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\ ;\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$$

2. a. Comparons les fonctions $x\mapsto f'(x)$ et $x\mapsto \dfrac{-g(x)}{e^x}$.

$$f(x)=(x+1)e^{-x}-x$$

$$f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}-1=-xe^{-x}-1=-\frac{x}{e^x}-1=-\frac{x+e^x}{e^x}=-\frac{g(x)}{e^x}$$

$$\boldsymbol{f'(x)=-\frac{g(x)}{e^x}}$$

b. Déduisons, des études précédentes, le sens de variation de la fonction f.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$. Le signe de f' dépend donc de celui de g.

- $\forall x\in]-\infty,\alpha[,\ g(x)<0\Rightarrow -g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f$ est croissante.
- $\forall x\in]\alpha,+\infty[,\ g(x)>0\Rightarrow -g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f$ est décroissante
- $g(\alpha)=0\Rightarrow f'(\alpha)=0\Rightarrow f$ est constante.

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			$f(\alpha)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$+\infty$

3. a. En utilisant $g(\alpha)=0$, comparons $f(\alpha)$ et $-\left(\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

$g(\alpha)=0 \Longrightarrow \alpha+e^{\alpha}=0 \Longrightarrow e^{\alpha}=-\alpha$

$f(\alpha)=(\alpha+1)e^{-\alpha}-\alpha=\dfrac{\alpha+1}{e^{\alpha}}-\alpha=\dfrac{\alpha+1}{-\alpha}-\alpha=-1-\dfrac{1}{\alpha}-\alpha=-\left(\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}\right)$

$$\boldsymbol{f(\alpha)=-\left(\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\right)}$$

b. Montrons que la droite (Δ):$y=-x$ est asymptote à (C).

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+1)e^{-x}]=0$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0}$ **; par conséquent, la droite (Δ):$y=-x$ est asymptote à (C).**

Étudions la position relative de (C) par rapport à (Δ).

Pour cela, étudions le signe de $f(x)-y=(x+1)e^{-x}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$. Le signe de $f(x)-y$ dépend de celui de $(x+1)$. Alors :

- **$\forall x\in\,]-\infty,\,-1[$, $f(x)-y<0$, (C) est en dessous de (Δ).**
- **$\forall x\in\,]-1,\,+\infty[$, $f(x)-y>0$, (C) est au dessus de (Δ).**
- **Pour $x=-1$, $f(x)-y=0$; alors (C) et (Δ) se coupent.**

c. On désigne par A le point où (T) est parallèle à (Δ).

Déterminons l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A.

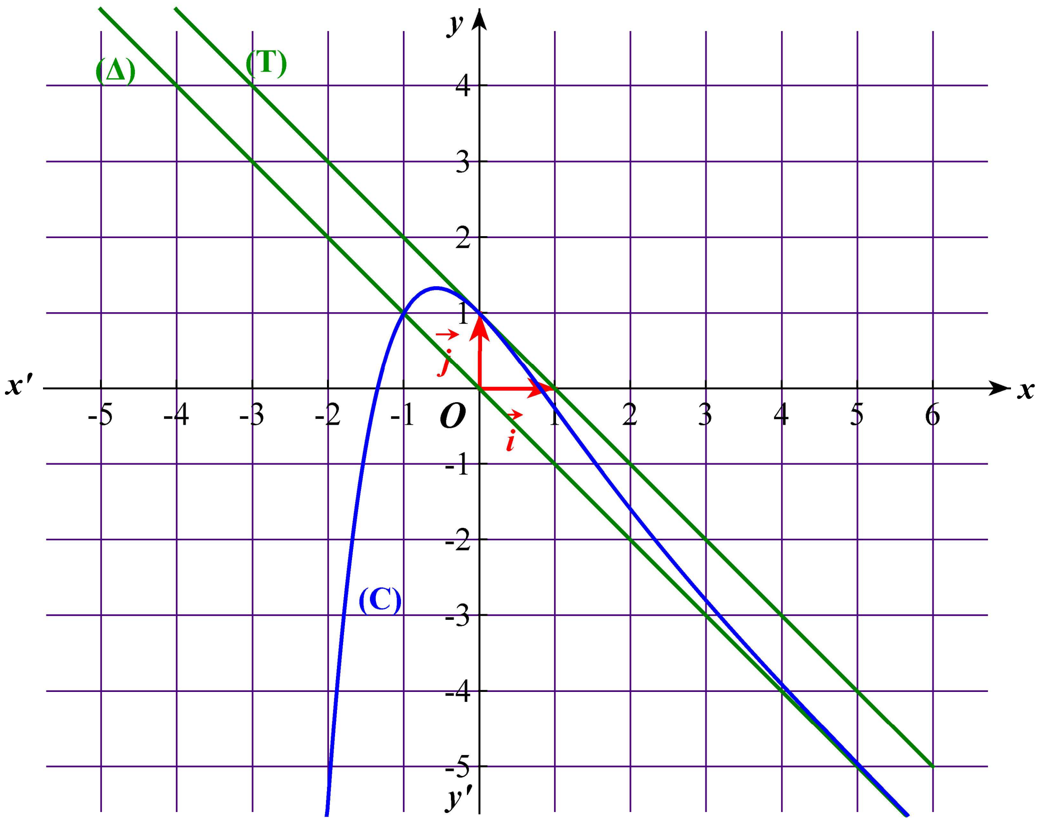
(T): $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ et (Δ): $y=-x$

$(T)/\!\!/(\Delta)\Leftrightarrow f'(x_0)=-1 \Leftrightarrow -\dfrac{x_0+e^{x_0}}{e^{x_0}}=-1 \Rightarrow x_0=0;$

$f(0)=(0+1)e^{-0}-0=1$; $\quad (T)$: $y=-1(x-0)+1=-x+1.$

$\boldsymbol{(T): y=-x+1}$

4. a. Construisons (C), (Δ) et (T).



b. Calculons la fonction dérivée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F : x \longmapsto (x+2)e^{-x}$

$F(x)=(x+2)e^{-x} \Longrightarrow F'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$.

$\boldsymbol{F'(x) = -(x+1)e^{-x}}$.

c. Calculons l'aire A du domaine plan compris entre (C) les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = -1$.

Reformulation : Calculons l'aire A du domaine plan compris entre (C) l′ axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$.

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[-F(x) - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \; = -F(0) + F(-1) + \frac{1}{2}$$

$$= \left(-2 + e + \frac{1}{2}\right) U.A = \left(\frac{2e-3}{2}\right)(2\times 2)\text{cm}^2$$

$\boldsymbol{A = (4e-6)\ \text{cm}^2}$.